平成２６年度大阪府公立高校入学試験 後期数学Ｂ 解説(抜粋)

注意：数学は自由です。これ以外にも様々な解き方がありえます。
この問題をまだ解いていない中学生は、一度は解いてから解説を読むことをお勧めします。

1 (6) 次の二つの条件を同時に満たす自然数 n のうち，最も小さい数を求めなさい。

- n は 4 けたの自然数である。
- n と 2014 の最大公約数は 53 である。

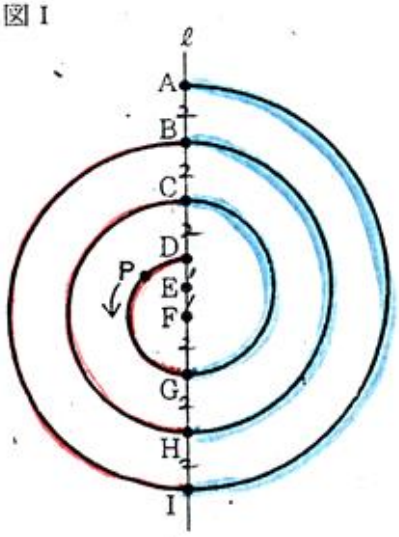
(ポイント) 2014を素因数分解して分析します。
$2014 = 2 \times 19 \times 53$
nと2014の最大公約数が53ということは
nは53を約数にもつが，2と19は約数にもたないということです。

$n = 53p$ (pは自然数) とおくと，
$53 \times 19 = 1007$ より nが4けたの自然数になるのは
$p = 19, 20, \cdots$ のとき
このうち，2と19を約数にもたない最小のpは21.
よって，$n = 53 \times 21 = \underline{1113}$ が求める最小のnである。

2 図Ⅰ，図Ⅱにおいて，A，B，C，D，E，F，G，H，Ⅰは直線 ℓ 上の点であって，この順に並んでおり，AB = BC = CD = 2 cm，DE = EF = 1 cm，FG = GH = HI = 2 cm である。$\overset{\frown}{AI}$，$\overset{\frown}{BH}$，$\overset{\frown}{CG}$ は，それぞれ E を中心とし 線分 EI，EH，EG を半径とする半円の弧であり，ℓ の右側にある。$\overset{\frown}{BI}$，$\overset{\frown}{CH}$，$\overset{\frown}{DG}$ は，それぞれ F を中心とし 線分 FI，FH，FG を半径とする半円の弧であり，ℓ の左側にある。六つの弧 $\overset{\frown}{DG}$，$\overset{\frown}{GC}$，$\overset{\frown}{CH}$，$\overset{\frown}{HB}$，$\overset{\frown}{BI}$，$\overset{\frown}{IA}$ がつながってできる曲線を「うずまき」と呼ぶことにする。

P は，D を出発し「うずまき」上を毎分 $\frac{\pi}{2}$ cm の速さで A まで移動する点であり，A に到着後 移動を終える。ただし，π は円周率である。次の問いに答えなさい。

図Ⅰ



(1) 図Ⅰにおいて，点 P が D を出発してから x 分後までに点 P が移動した道のりを y cm とする。

② 点 P が D を出発し「うずまき」上を A まで移動するとき，y を x の式で表しなさい。

$y = \frac{\pi}{2}x$ …Ⓐ

① 次の表は，x と y との関係を示した表の一部である。表中の(ア)，(イ)に当てはまる数をそれぞれ書きなさい。

x	…	4	…	7	…	(イ)	…
y	…	2π	…	(ア)	…	10π	…

20

$\frac{7}{2}\pi$

$y = \frac{\pi}{2}x$ に代入するだけです。

③ 点PがAに到着するときのxの値を求めなさい。

DからAまでの距離は、$2\pi+3\pi+4\pi+5\pi+6\pi+7\pi=27\pi$

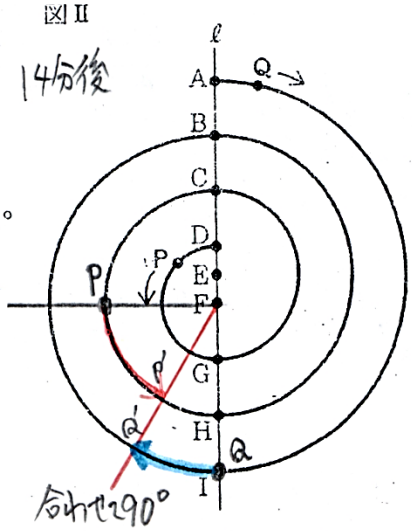
$y=27\pi$を㋐に代入して、$x=54$

半分ずつ分けて考えるだけです。

(2) 図Ⅱにおいて，Qは，Aを出発し「うずまき」上を毎分$\frac{\pi}{2}$ cmの速さでDまで移動する点である。2点P，Qは，それぞれD，Aを同時に出発する。次の文中の［あ］，［い］に入れるのに適している自然数をそれぞれ書きなさい。ただし，［い］には60より小さい自然数が入るものとする。

> 2点P，Qがそれぞれ D，Aを同時に出発し，点Qが I を通過してから初めて3点F，P，Qがこの順に一直線上に並ぶのは，2点P，Qが同時に出発してから［あ］分［い］秒後である。

図Ⅱ



点QがIに来るまでに、$7\pi\div\frac{\pi}{2}=14$(分)かかるので、14分後の状況は図のようになる。

ここからk分後にF, P, Qが一直線上に並ぶとし、PはP'に、QはQ'に移動とすると、

$\angle PFP'+\angle QFQ'=90°$になる。

$\overset{\frown}{PP'}$は、直径8cmの円の一部、

$\overset{\frown}{QQ'}$は直径12cmの円の一部なので、

$$\angle PFP'+\angle QFQ'$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}k}{8\pi}\times360°+\frac{\frac{\pi}{2}k}{12\pi}\times360°=90°$$

これを解く、$\frac{k}{16}+\frac{k}{24}=\frac{1}{4}$

$3k+2k=12$

$k=\frac{12}{5}$

よって、PQが出発してから

$14+\frac{12}{5}=16+\frac{2}{5}$(分後)

つまり、16分24秒後になる。

3 図Ⅰ，図Ⅱにおいて，△ABC は，AB = AC = 7 cm，BC = 12 cm の二等辺三角形である。D は，辺 BC 上にあって B，C と異なる点である。BD = x cm とし，$0 < x < 6$ とする。A と D とを結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

(1) 図Ⅰにおいて，

② △DBA ∽ △ABC であるときの x の値を求めなさい。

△DBA = △ABC より

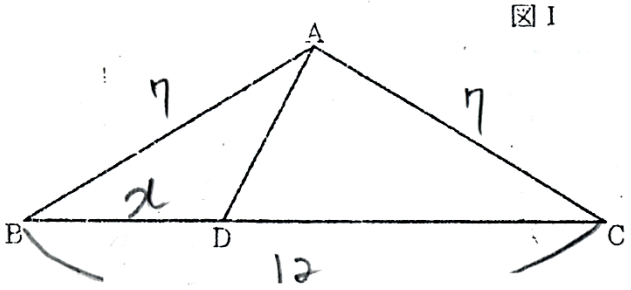
DB : AB = BA : BC

$x : 7 = 7 : 12$

$12x = 49$

$x = \frac{49}{12}$

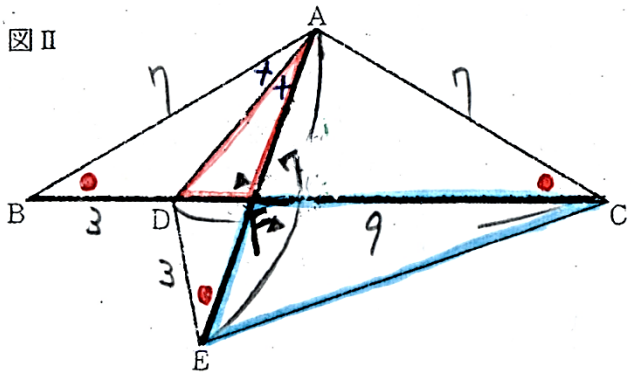
図Ⅰ



(2) 図Ⅱにおいて，E は直線 AD について B と反対側にある点であり，△AED ≡ △ABD である。E と C とを結ぶ。F は，線分 AE と辺 BC との交点である。

① △ADF ∽ △CEF であることを証明しなさい。

図Ⅱ



(ポイント) 今回のポイントとなる問題でしょう。
∠AFD = ∠CFE (対頂角▲) …① は当然ですが，もう1組が難しいです。
図に等しい角を書き込んで，
∠AED = ∠ACD (●) を見つけたら，ピンときて欲しいです。そう，円周角の定理の逆です。

あまり見ない問題かもしれませんが，実は2012年の前期B[2]で類題が出題されています。
前回は厳しいとコメントしましたが，今回はできて欲しいというのが正直なところです。少なくとも私は強調していたつもりですが(HPにもアップしています)。
いずれにせよ，解けると，大きく合格に近づく問題です。

(大阪府教育委員会による証明例)

△ADF と△CEF において

∠AFD = ∠CFE（対頂角） …… ㋐

△ABC は二等辺三角形だから　∠ABD = ∠ACD …… ㋑

△AED ≡ △ABD だから　∠AED = ∠ABD …… ㋒

㋑，㋒より　∠ACD = ∠AED

2 点 C，E が直線 AD について同じ側にあって，∠ACD = ∠AED だから，4 点 A，D，E，C は一つの円周上にある。

よって，同じ弧に対する円周角は等しいから

∠DAF = ∠ECF …… ㋓

㋐，㋓より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ADF ∽ △CEF

② $x=3$ であるとき，

㋐ 線分 FC の長さを求めなさい。

これも難度の高い問題です。

①で△ADF∽△CEFを示せても，相似比が分かっていません。ただ①で円に内接することが分かれば，△FDE∽△FAC（相似比3：7）も見えるはずです。

そこで，AE=7，DC=9が分かっていることを使って，式を2つ立てていきます。

△FDE∽△FAC（相似比3：7）より，

FE=3m，FC=7m，FD=3n，FA=7nとおく。

AE=7，DC=9より，

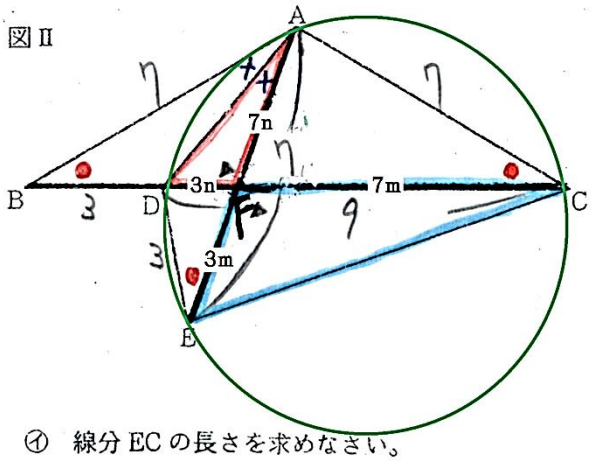
$$\begin{cases} \underset{FE}{3m}+\underset{FA}{7n}=\underset{AE}{7} \\ \underset{FC}{7m}+\underset{FD}{3n}=\underset{DC}{9} \end{cases}$$

これを解いて，

$$\begin{cases} m=\dfrac{21}{20} \\ n=\dfrac{11}{20} \end{cases}$$

$FC=7m=\underline{\dfrac{147}{20}\ (\text{cm})}$

図Ⅱ



㋑ 線分 EC の長さを求めなさい。

△ADF∽△CEFで

ECに対応するのは，DA

よってまずDAを求めます。

AからBCに垂線を下ろしその交点をHとすると

$AH=\sqrt{7^2-6^2}=\sqrt{13}$，DH=3より，

$AD=\sqrt{\sqrt{13}^2+3^2}=\sqrt{22}$

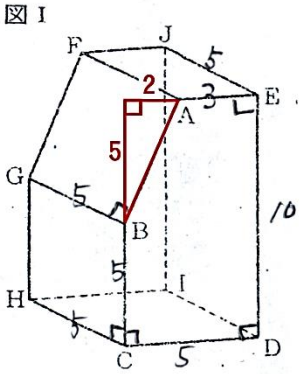
△FDAと△FECの相似比は，

（FA：FC=7n：7m=）11：21

ゆえにEC=AD×$\dfrac{21}{11}$=$\underline{\dfrac{21\sqrt{22}}{11}\ (\text{cm})}$

4　図Ⅰ～図Ⅲにおいて，立体 ABCDE－FGHIJ は五角柱である。四角形 AFGB，AEJF，EJID は長方形であり，四角形 BGHC，CDIH は正方形である。BC = CD = 5 cm，ED = 10 cm，AE = 3 cm，∠BCD = ∠CDE = ∠DEA = 90° である。
次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい

図Ⅰ



(1)　図Ⅰにおいて，

②　長方形 AFGB の面積を求めなさい。

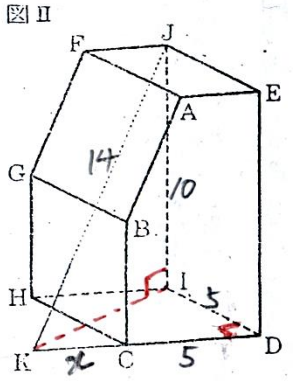
GBは5なので，あとはABの長さを出すだけです。

$AB=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

よって，求める面積は $5\sqrt{29}$

(2)　図Ⅱにおいて，K は，直線 CD 上にあって C について D と反対側にある点である。J と K とを結んでできる線分 JK の長さが 14 cm であるときの線分 KC の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

図Ⅱ



(ポイント)
KIは△JKI，△KIDに共通な辺なので，三平方の定理を2度使えばできます。

求めるKCを x cmとする。

∠JIK=90°だから，△JKIにおいて

$KI^2=14^2-10^2$ …①

∠IDK=90°だから，△KIDにおいて

$KI^2=(x+5)^2+5^2$ …②

①，②より $14^2-10^2=(x+5)^2+5^2$

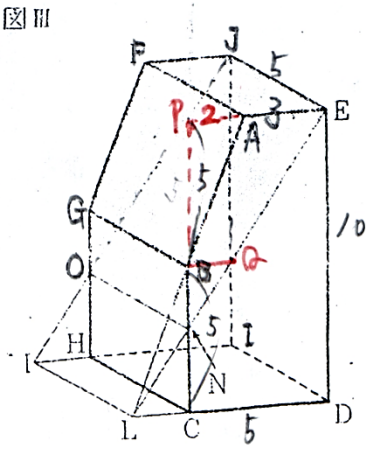
これを解くと $x^2+10x-46=0$

解の公式を使って $x=\dfrac{-10\pm\sqrt{10^2+4\times46}}{2}=\dfrac{-10\pm2\sqrt{71}}{2}=-5\pm\sqrt{71}$

$x>0$ より $x=-5+\sqrt{71}$ (cm)

(3)　図Ⅲにおいて，L は，直線 AB と直線 CD との交点である。M は，L を通り直線 CH に平行な直線と直線 HI との交点である。E と L，J と M とをそれぞれ結ぶ。N は線分 EL と辺 BC との交点であり，O は線分 JM と辺 GH との交点である。このとき，4 点 E，J，O，N は同じ平面上にあって，この 4 点を結んでできる四角形 EJON は長方形である。四角柱 ABNE－FGOJ の体積を求めなさい。

図Ⅲ



四角柱の底面は四角形ABNEです。

この面積は，△LAE－△LNBで求まります。

図のようにP，Qをとったとき

△BAP≡△BLCより AP=LC=2

△LBQ∽△LAE（相似比1:2）より $BQ=\frac{3}{2}$

△NLC∽△NQB（相似比4:3）より $NB=\frac{15}{7}$ となります。

よって，$\triangle LAE-\triangle LNB=3\times10\times\frac{1}{2}-\frac{15}{7}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{90}{7}$

求める体積は，$\frac{90}{7}\times5=\frac{450}{7}$ (cm³)

【解いてみた感想】

なかなか歯ごたえのあるセットでした。難度は例年に比べて上がっているといえるでしょう。計算が複雑で答えが合わないというような問題は少ないものの、冷静に素早く処理しないと、時間が不足して取れるはずの問題を落とすということになりかねません。

難所は大問３平面図形です。解説でも書きましたが、2012 年前期Ｂに続き、円周角の定理の逆が出題されました。大阪府お気に入りのようです。過去問の演習をしっかりやっておけば、取れたのではないかと思いますが、試験の緊張状態の中では気がつかない受験生も多かったのではないかと思います。とくに文理学科などの前期受験を考えてこなかった受験生で､問題を見ていなかった場合は厳しかったと思います。結論としては、旧学区トップ校レベルでなければ、落としてもさほど痛手にはならないでしょう。逆にとれれば、その後の問題も取り得た(こちらも易しくはありませんでしたが)ことから、合格にかなり近づいたと思います。

一方、その他の１・２・４はやや難とはいえ、基礎力がしっかり身についているかを試す問題になっていると思います。ここでいかに取りこぼさないかが合否を決める上では重要になってくるでしょう。

内申点や他の科目との兼ね合いがもちろんありますが、1(1)～(5)、2(1)、3(1)、4(1)･(2)の 42 点分は確保したいところで、さらに 1(6)、2(2)、3(2)、4(3)のうちで 10 点とれれば良しというところでしょうか。ここからミスによる減点をいかに減らすかがやはり重要になってくるのは、いつものとおりです。

受験をされた皆さん、本当にお疲れ様でした。せっかく受験されて必死に考えてきたのに、解き方が分からず終わってしまうのは、寂しいのではと思って、お節介にも解説をしております。

実力が出し切れず、もやもやした時間を過ごしている方も多数いらっしゃると思います。しかし、周囲が私立専願や前期試験等で抜けていく中、気持ちを切らさず、最後まで頑張ってこられたという自分自身をまず褒めてあげてください。このやりきった経験は、これからの人生で必ず役に立つと思います。

ここからの数日は思いっきり羽を伸ばしてください。そして４月以降、様々な進路において、自分のために、周囲の大切な人のために、そして少しは大阪や日本のために、ご自身の人生をさらに輝かせて欲しいと思います。

2014 年 3 月 14 日