平成２３年度大阪府公立高校入学試験後期　数学

普通科(選択問題 B)　解説

注意：数学は自由です。これ以外にも様々な解き方がありえます。
この問題をまだ解いていない中学生は、一度は解いてから解説を読むことをお勧めします。

1　次の問いに答えなさい。

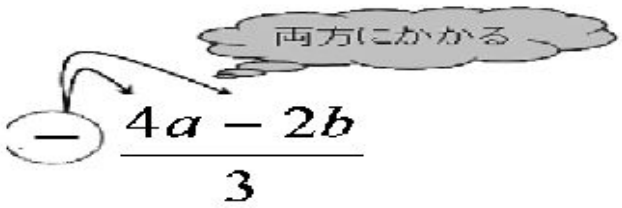
(1)　$7-2\times(-3)-8\div(-2)$　を計算しなさい。

＝　１７

(2)　$\dfrac{2a-3b}{5}-\dfrac{4a-2b}{3}$　を計算しなさい。

$= \dfrac{-14a+b}{15}$

※通分するときに、符号を間違えないように気をつけましょう。



(3)　$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})-(\sqrt{2}-2)^2$　を計算しなさい。

$=4\sqrt{2}$

※ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　の基本公式を使うだけです。

(4) 次のア～エのことがらについて，その逆が正しいものを一つ選び，記号を書きなさい。

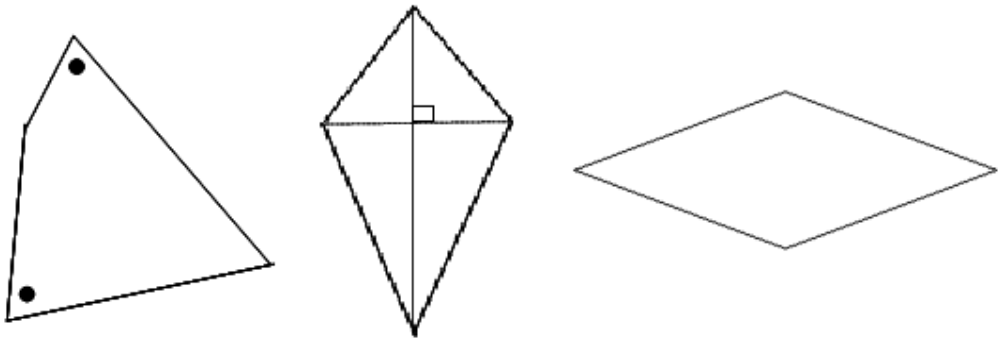
ア　四角形 ABCD が平行四辺形 ならば 四角形 ABCD の 1 組の向かい合う角の大きさが等しい。

イ　四角形 ABCD が長方形 ならば 四角形 ABCD の四つの内角の大きさがすべて等しい。

ウ　四角形 ABCD がひし形 ならば 四角形 ABCD の 2 本の対角線が垂直に交わる。

エ　四角形 ABCD が正方形 ならば 四角形 ABCD の四つの辺の長さがすべて等しい。

「A⇒B」の「逆」は「B⇒A」です。
正解はイ。
イ：「四つの内角の大きさが等しい」ということは、全ての角度が 90°であることを意味します。
これは、長方形ですね。
そのほかの反例をア、ウ、エの順に挙げておきます。



(5) 二つの箱 A，B がある。箱 A には偶数の書いてある 4 枚のカード 2，4，6，8 が入っており，箱 B には奇数の書いてある 4 枚のカード 3，5，7，9 が入っている。箱 A と箱 B からそれぞれ 2 枚のカードを同時に取り出すとき，箱 A から取り出した 2 枚のカードに書いてある数の和が，箱 B から取り出した 2 枚のカードに書いてある数の和より大きくなる確率はいくらですか。A，B それぞれの箱において，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとして答えなさい。

まず A から 2 枚取り出したときに、どのような組合せで出てくるかをみると
(2,4)、(2,6)、(2,8)、(4,6)、(4,8)、(6,8)の 6 通りです。
それぞれの数の和は、
(2,4)→6、(2,6)→8、(2,8)→10、(4,6)→10、(4,8)→12、(6,8)→14
それぞれの組合せの出る確率は同様に確からしいので、全て 1/6 です。
これを表にまとめると

A	6	8	10	10	12	14
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

同様に B は、

B	8	10	12	12	14	16
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

これって、A、B２つのサイコロを振ったときと状況は同じですよね。
それぞれが出る確率は 1/6、でも各面に書かれた数字は１～6 ではなく 10 とか 14 とかです。

そこですばやく、2 個のさいころ表を作ります。A>B となるところに○をつけると

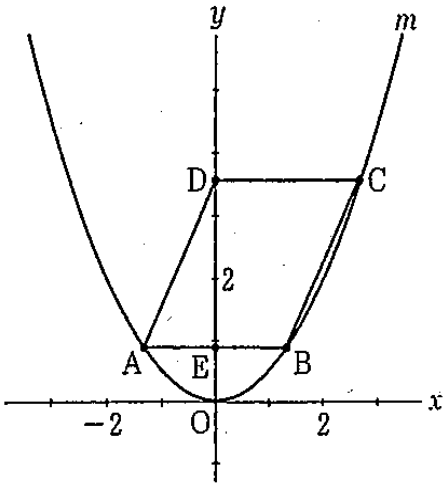
		A					
		6	8	10	10	12	14
B	8			○	○	○	○
	10					○	○
	12						○
	12						○
	14						
	16						

それぞれの組合せが出る確率は全て等しく、36(通り)のうち、○がついたのは 8(通り)です。

よって求める確率は、$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$　となります。

※ 途中、A や B をまとめる表を作ったときに、A が１０となる確率や B が１２となる確率を 2/6 としなかったことに気づかれたでしょうか。これをまとめて 2/6 としても、もちろん解けるのですが、そうすると、さいころの表を作ったときに、どの箱もそれぞれ等しい確率で出る(確率：1/36)ということが言えなくなってしまい、最後の処理を単純に $\frac{\text{○の個数(通り)}}{36\text{(通り)}}$ とできなくなってしまい、面倒な計算をしなければならなくなるのです。

(6) 右図において，m は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを表す。A，B，C は m 上の点である。A の x 座標は負であり，B の x 座標は正であり，C の x 座標は，B の x 座標より大きい。B の y 座標は，A の y 座標と等しい。D は y 軸上の点であって，D の y 座標は C の y 座標と等しい。E は y 軸上の点であって，E の y 座標は A の y 座標と等しい。4 点 A，B，C，D を結んでできる四角形 ABCD は平行四辺形である。AB = DE であるときの B の x 座標を求めなさい。求め方も書くこと。ただし，x 軸の 1 目もりの長さと y 軸の 1 目もりの長さとは等しいものとする。



典型的な関数のグラフの問題です。求める b の x 座標を文字でおいて、他の点の座標もどんどんその文字で表していくだけです。

B の x 座標を b とすると、$B\left(b,\frac{1}{2}b^2\right)$ となり、$A\left(-b,\frac{1}{2}b^2\right)$、$E\left(0,\frac{1}{2}b^2\right)$、AB=2b となる。

四角形 ABCD は平行四辺形であるから、DC=AB=2b であり、C の x 座標は 2b となる。

C はm上の点なので $C\left(2b,2b^2\right)$ となり、これより $D\left(0,2b^2\right)$ となる。

ここで、AB=DE から、$2b=\frac{3}{2}b^2$　これを解いて、$b=0,\frac{4}{3}$

b >0 だから、$b=\frac{4}{3}$

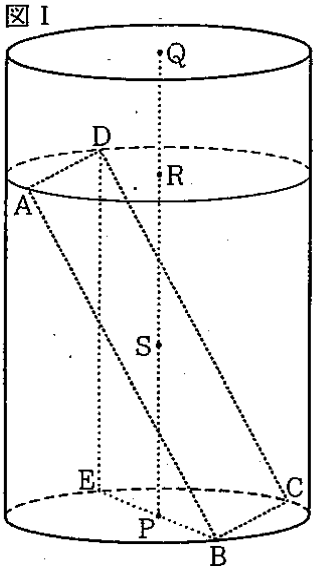
以上より、求めるBのx座標は$\frac{4}{3}$である。

※ グラフ上の点は、X 座標または Y 座標のいずれか一方が分かれば他方が分かる関係にあります。各点の一方が分からないかを常に意識して、他方を計算して求める。この繰り返しです。

2　図Ⅰ～図Ⅲの立体は，点Ｐを中心とする半径 3 cm の円Ｐと点Ｑを中心とする半径 3 cm の円Ｑを底面とし，高さが 9 cm の円柱である。直線 PQ は底面に垂直である。

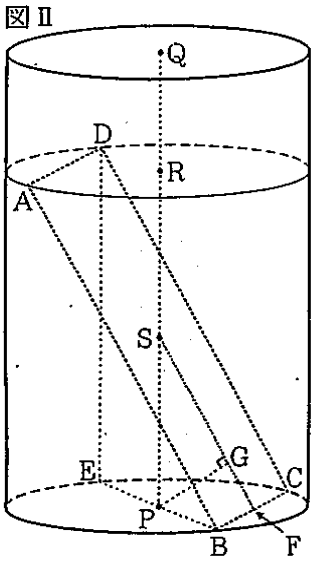
円周率を π として，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

図Ⅰ



(1)　図Ⅰ，図Ⅱにおいて，Ｒは線分 PQ 上にあって，Ｐ，Ｑと異なる点である。点Ｒを中心とする円Ｒは半径が 3 cm であり，円Ｒをふくむ平面は円柱の底面と平行である。四角形 ABCD は，AB ＝ DC ＝ 8 cm，BC ＝ AD ＝ 4 cm の長方形である。B，C は，円Ｐの周上にあって，A，D は円Ｒの周上にある。S は，長方形 ABCD の対称の中心であり，線分 PQ 上にある。E は，D を通り直線 PQ に平行な直線と円Ｐとの交点である。B と E とを結ぶ。このとき，直線 DE は円Ｐをふくむ平面と垂直であり，線分 BE は円Ｐの直径である。

図Ⅱ



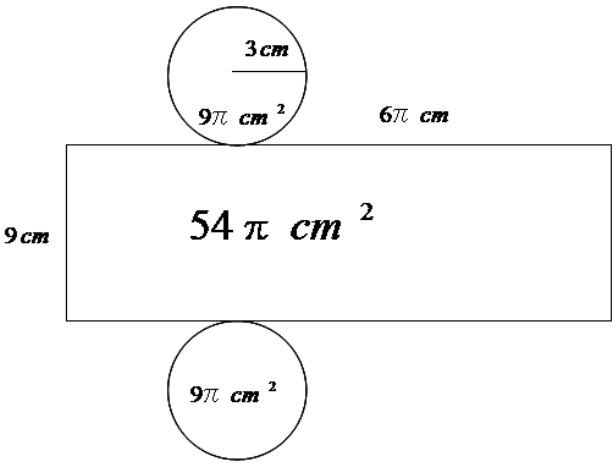
①　図Ⅰにおいて，

㋐　円Ｐと円Ｑを底面とする円柱の表面積を求めなさい。

㋑　線分 DE の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

②　図Ⅱにおいて，F は，辺 BC の中点である。S と F とを結ぶ。G は，P から線分 SF にひいた垂線と線分 SF との交点である。線分 PG の長さを求めなさい。

(1)①ア　展開図は右図のようになります。



よって、求める表面積は $72\pi\ cm^2$ になります。

(1)①イ

※　求める線分 DE を含む平面で、既に長さが分かっている線分を含むものは、点 D・E・B を通る平面か、点 D・E・A を通る平面です。ここで、線分 EB と線分 DA の長さは共に分かっていますが、あと１つの線分 DB と線分 AE のうち、求められそうなものは線分 DB でしょう。

　そこで、点 D・E・B を通る平面で考える、つまり、△DEB において三平方の定理から線分 DE の長さを求める方針に決定します。

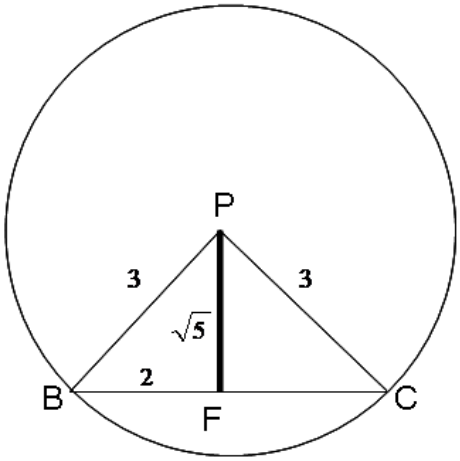
線分 BD の長さは、△DBC についての三平方の定理により、$\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$

よって、線分 DE の長さは、△DEB についての三平方の定理により、$\sqrt{4\sqrt{5}^2-6^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

(2)

※　面に対する垂線の長さということで、一瞬、体積から求めるのかなと考えた方もいらっしゃると思いますが、本問は普通に平面で解く問題です。

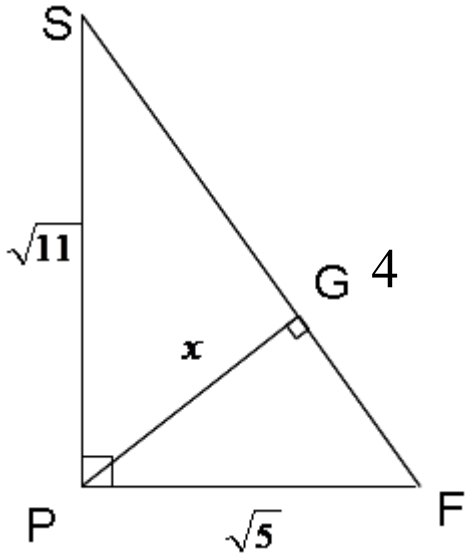
　まず、底面円 P で線分 PF を求めて、△SPF で相似にもっていけばすぐです。



線分 PF の長さは、△PBF についての三平方の定理により、

$\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

また、$SP=\frac{1}{2}DE=\sqrt{11}$



線分 PG の長さを x とする。

∠S 共通、∠SPF＝∠SGP=90°　より、

２組の角がそれぞれ等しいから、△SFP ∽ △SPG

よって、$SF:SP=4:\sqrt{11}=\sqrt{5}:x=PF:PG$

$x=\frac{\sqrt{55}}{4}$

(別解：相似に気づかなくても、△SPF の面積を、

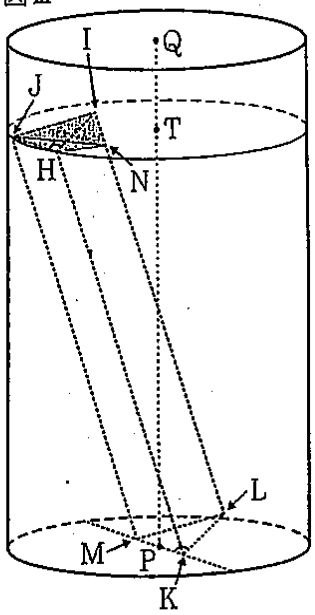
線分 PF を底辺、線分 SP を高さとして $\frac{\sqrt{55}}{2}$ と出してから、

線分 SF を底辺、線分 PG を高さとして面積を考えても

ｘは求まります。)

(2) 図Ⅲにおいて，T は線分 PQ 上にあって，P，Q と異なる点である。点 T を中心とする円 T は半径が 3 cm であり，円 T をふくむ平面は円柱の底面と平行である。立体 HIJ − KLM は三角柱である。△HIJ は，∠JHI = 90°，HJ = HI = 2 cm の直角二等辺三角形である。△HIJ ≡ △KLM である。四角形 HKLI，JMLI，JMKH はすべて長方形であって，長方形 HKLI ≡ 長方形 JMKH である。HK = 8 cm である。K，M は円 P の直径上にあって，KP = MP である。H，J は，円 T の周上にある。このとき，平面 HKLI は円柱の底面に垂直である。N は，円 T をふくむ平面と辺 IL との交点である。N と H，N と J とをそれぞれ結ぶ。このとき，△JHN は，∠JHN = 90°の直角三角形である。三角すい I − JHN の体積を求めなさい。

図Ⅲ



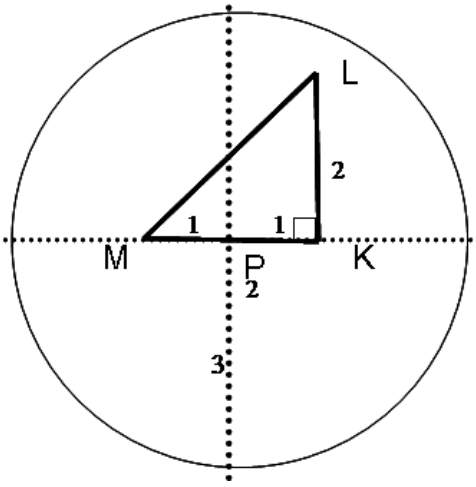
なかなか複雑な問題文です。でも、この問題文には様々なヒント(書いてなくても解くことはできるが、時間の短縮のためと、問題を易しくするために書き込んでくれていること)がちりばめられています。

短時間に正確に問題文を読む。図を正確に表すためにダラダラと書かれているところはざっと読んで、ヒントはしっかり拾う。これができるかが勝負です。

・対象は単なる三角柱
・IN が求める三角すいの高さ(△IJH が底面)になり、これを求める問題。
・三角柱の底面は、∠JHI と∠MKL が直角の直角二等辺三角形
・P は線分 MK の中点
・四角形 JMKH は長方形(三角柱なのだから当然だが、重要ヒント)
・H と J は円 T の周上にある。
・平面 HKLI は円柱の底面に垂直(∠MKL が垂直だからこれも当然だが、重要ヒント)
　これくらいがきちんと読めれば十分ではないでしょうか。

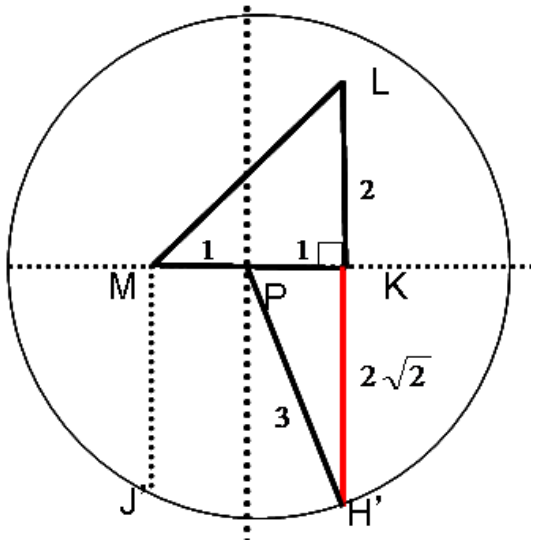
そうすると、図のイメージとしては、底面にまっすぐに立てた円柱内の三角柱を、MK を軸に回転させて(倒して)、J と H が円柱に接したところで止めた図であるということが分かってくると思います。

ここまでこられれば、ゴールが見えてきます。とりあえず三角柱をまっすぐに戻して考えましょう。



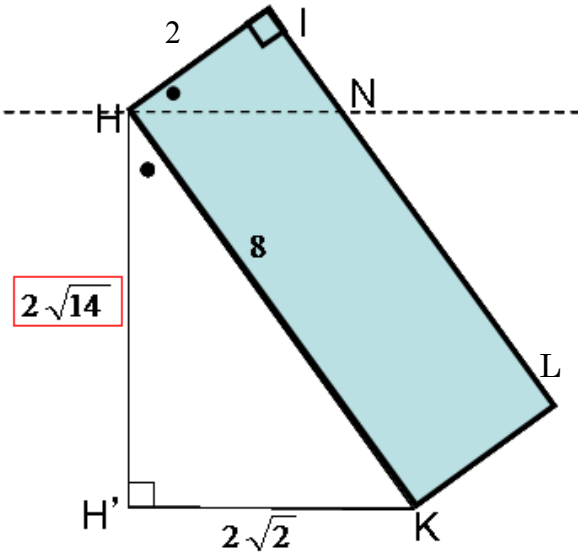
そうすると、底面は左図のようになります。ここから、MK を軸に、J と H が円柱に接するまで倒します。

J と H から、PQ に平行線を引いたものと、円 P との交点をそれぞれ J’ と H’ とする(=J と H から底面に垂直におろした足を J’ と H’ とする)と、次図のようになります。



線分 KH' の長さは、△PH'K についての三平方の定理により、$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

次は、倒した三角柱を右側(K 側から)見てみましょう。



倒した図が左図です。

まず、線分 HH' の長さは、△HH'K についての三平方の定理により、$\sqrt{8^2-2\sqrt{2}^2}=2\sqrt{14}$

次に、

∠NHI=KHH'、∠HIN＝∠HH'K=90°より、

2 組の角がそれぞれ等しいから、△NHI ∽ △KHH'

よって、$HI:HH'=2:2\sqrt{14}=IN:2\sqrt{2}$

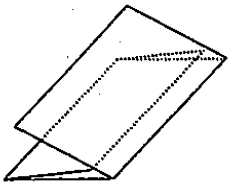
$$IN=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

求めたかった線分 IN が求まりました。

最後に求める三角すい I-JHN(三角すい N-IJH)の体積は、

$$2\times2\times\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{7}}{21}$$ となります。

3 サチコさんは，長方形の紙を内側に三つに折るときのようすに興味をもち，図Ⅰのような模式図をかいて考えてみた。

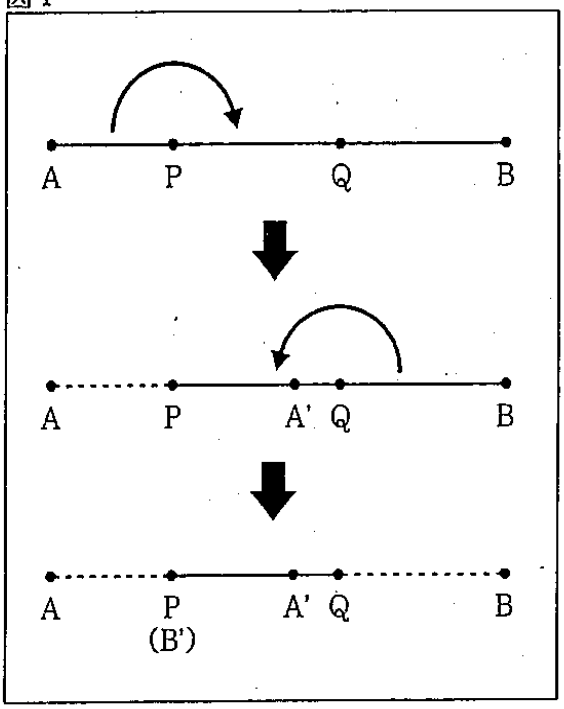


図Ⅰにおいて，線分ABの長さは300 mmである。Pは，線分AB上にあってA，Bと異なる点である。線分APの長さは，100 mm以下とする。Qは，線分PBの中点である。

図Ⅰに示したように，線分ABについて，まず，線分APをPを中心として時計回りに180°回転させ，このときAが移った点をA'とする。次に，線分QBをQを中心として反時計回りに180°回転させ，このときBが移った点をB'とする。B'はPと一致する。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

図Ⅰ



(1) まず，サチコさんは，図Ⅰにおいて，線分APの長さを x mmとし，そのときの線分PQの長さを y mmとして，x と y との関係を表とグラフをかいて考えてみた。

① 次の表は，サチコさんがかいた表の一部である。表中の(ア)，(イ)に当てはまる数をそれぞれ書きなさい。

x	・・・	30	・・・	40	・・・	(イ)	・・・
y	・・・	135	・・・	(ア)	・・・	122	・・・

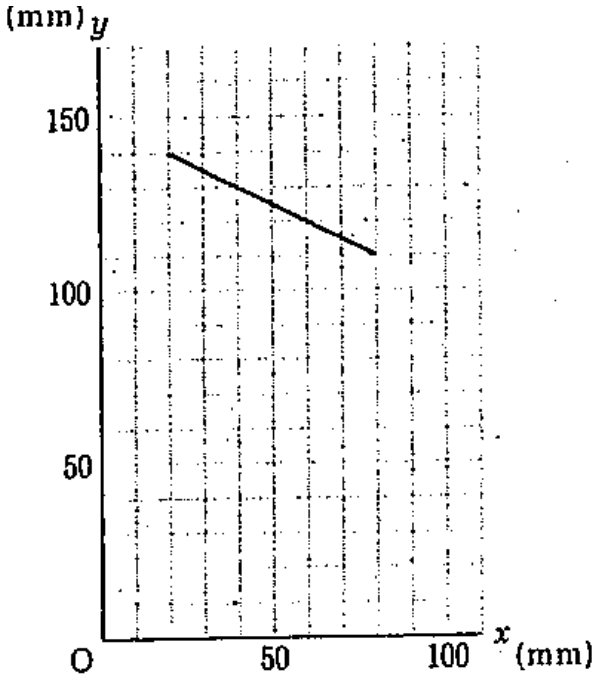
② $20 \leqq x \leqq 80$ のときの x と y との関係を表すグラフを解答欄の図中にかきなさい。

（1） $PB = 300 - x$ より $y = \frac{300-x}{2}$

これにあてはめて、アは130、イは56　となる。

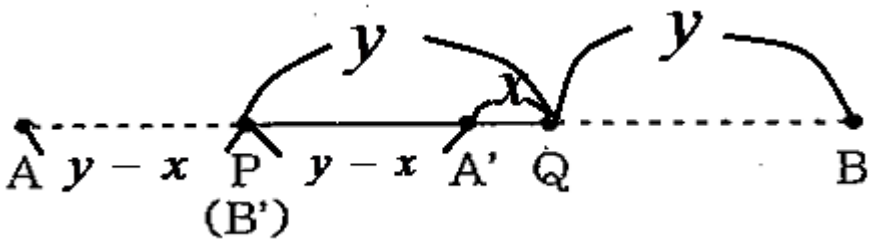
（2）変域に気をつけて、$y=\frac{300-x}{2}$ の

グラフを書くと右図になる。



(2) 次に，サチコさんは，図Ｉにおいて，線分A'Qの長さを x mmとし，そのときの線分PQの長さを y mmとして考えてみた。このとき，$0<x<150$ として，y を x の式で表しなさい。

問題の指示に従って、長さをとると、下図のようになる。



AB＝AP＋PQ＋QB＝３ｙ－ｘ＝300　より

$y=\frac{1}{3}x+100$

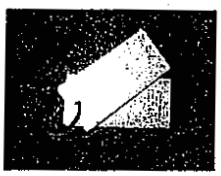
(3) AB：PB ＝ $\sqrt{2}$ ： 1 となるときの線分A'Qの長さを求めなさい。

（2)の図を利用して、AB＝３ｙ－ｘ、PB＝２ｙより

$AP:PB=3y-x:2y=\sqrt{2}:1$ 、これを解いて、$x=(3-2\sqrt{2})y$ ・・①

（2)で求めた $y=\frac{1}{3}x+100$ を、①に代入して　　$x=-300+225\sqrt{2}$

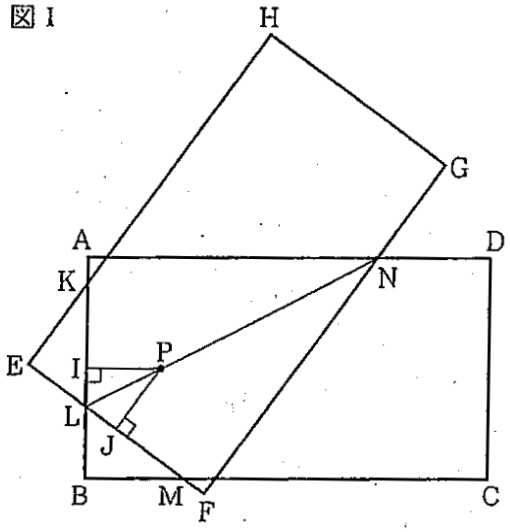
4 図Ⅰにおいて，四角形ABCDはAB＝6 cm，AD＝11 cmの長方形である。Ⅰは，辺ABの中点である。Pは，長方形ABCDの内部の点であって，Ⅰを通り辺ABに垂直な直線上にあり，PI＝2 cmである。このとき，AD∥IPである。線分PJと四角形EFGHとは，それぞれ線分PIと長方形ABCDとを点Pを中心として同じ向きに同じ角度だけ回転させたものである。このとき，PI＝PJ，長方形ABCD≡長方形EFGHである。Gは，直線EHについてAと反対側にあって，直線ADについてCと反対側にある。K，L，M，Nは，それぞれ辺ABと辺EH，辺ABと辺EF，辺BCと辺EF，辺ADと辺FGとの交点である。このとき，Pは直線LN上にある。



次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

(1) PとCとを結んでできる線分PCの長さを求めなさい。

図Ⅰ

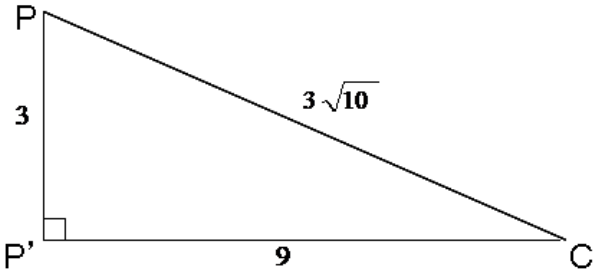


PからBCにおろした足をP’とすると、

$PP' = 3$、$P'C = BC - PI = 11 - 2 = 9$

線分PC の長さは、△PP’Cについて、

三平方の定理により、$\sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$



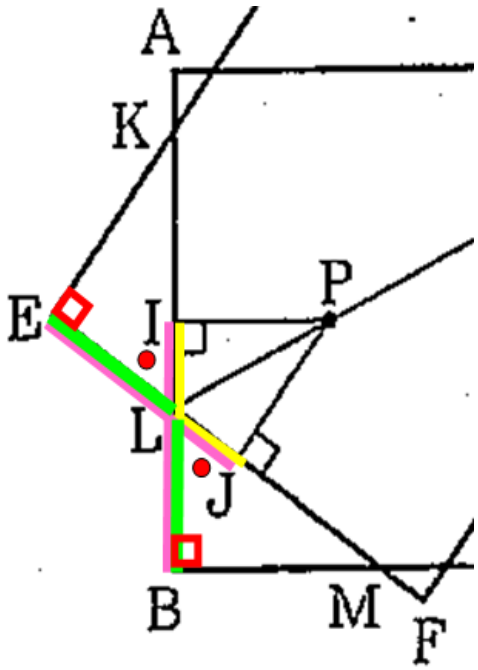
(2) 次の【証　明】は，まず，△PIL ≡ △PJL である
ことを証明してから，IL ＝ JL であることを示し，
その後，IL ＝ JL であることを用いて△KEL ≡ △MBL であることを証明したものである。次の【証　明】における ⓐ〔　　〕から適しているものを一つ選び，記号を書きなさい。また，【証　明】における ⓑ の部分に△KEL ≡ △MBL であることの証明を書き加え，【証　明】を完成させなさい。

【証　明】
△PIL と △PJL において
PL ＝ PL（共通）…… ㋐
PI ＝ PJ（仮定）…… ㋑
∠PIL ＝ ∠PJL ＝ 90°（仮定）…… ㋒
㋐，㋑，㋒より，ⓐ〔 ア　直角三角形の斜辺と他の１辺　　イ　直角三角形の斜辺と一つの鋭角
ウ　２辺とその間の角 〕
がそれぞれ等しいから　△PIL ≡ △PJL
よって　IL ＝ JL

ⓑ

a について
直角三角形 PIL と直角三角形 PJL において、斜辺と他の１辺が等しいから△PIL≡△PJL
よって、IL=JL　→ア

b について



証明の対象が△KEL と△MBL であることは問題文に示されています。
そして、∠KEL＝∠MBL＝90°（仮定）・・・①
∠KLE＝∠MLB（対頂角）・・・②
であることはすぐに分かると思います。

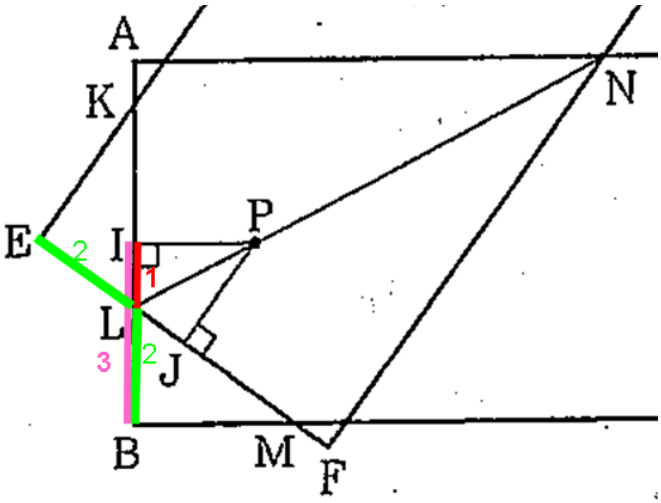
あとは、問題が誘導してくれている大ヒント **IL=JL を使って**、辺の長さが等しいことを言う必要があります。
直角三角形なので、斜辺 KL＝ML が言えればよいのですが、これは難しそうです。
そこでもう一つの方法である EL＝BL を言うことにします。
左図で示すように、

$$EL = EJ - JL = \frac{1}{2}EF - JL \quad ・・・③$$

$$BL = BI - IL = \frac{1}{2}AB - IL \quad ・・・④$$

③、④において EF=AB(仮定)、JL＝IL(a の証明)より、
EL＝BL・・・⑤
①、②、⑤より、１辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、△KEL≡△MBL　となります。

(3)　EL＝2 cm であるときの線分 AN の長さを求めなさい。求め方も書くこと。



(2)と同様に、
EL＝2 cm　→　BL＝2 cm
→　IL＝IB－BL＝3 cm－2 cm＝1 cm

ここで、
IP // AN より(△LIP∽△LAN とみても可)
　IP : AN＝LI : LN＝1 : 4

よって　AN＝4 IP＝8 (cm)

【解いてみた感想】

選択問題 B は、例年通り空間把握や図形の証明が中心となっていました。難度も例年並だと思います。分量も適当な量でしょう。大問 2(2)で時間を使い果たしてしまい、大問 4 に手がつけられないなどのトラブルさえなければ力を出しきれる問題セットではないでしょうか。

一番の難所は大問 2(2)ですが難航しそうならば後に回すのがよいでしょう。時間制限のある試験においては解ける問題から解くのが当然ですが、とくに、大阪府の数学では高校ごとに問題を選択する制度があるので、後ろの大問が前の大問より簡単であることが頻繁におこるので注意が必要です。解ける問題を時間切れで落とさない、解いた問題ではミスしないを、入試においてはとくに心がけてください。(結果論ですが、大問 2(2)の配点は 80 点中 5 点とさほど高くなかったです。)

平面図形の証明・空間図形の把握を中心に、関数、確率など頻出分野に苦手を残さないようにして、日々の勉強を頑張ってください。感想でした。