平成２３年度入学者選抜　大阪府公立高校　前期入試　数学解説

文理学科・理数科・総合科学科・サイエンス創造科

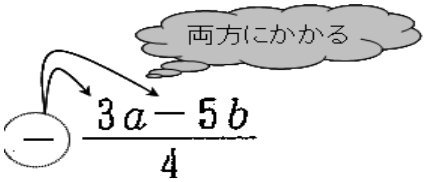
注意：数学は自由です。これ以外にも様々な解き方がありえます。

1　次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

(1)　$\dfrac{7a-4b}{5}-\dfrac{3a-5b}{4}$　を計算しなさい。

$$=\frac{13a+9b}{20}$$

※通分するときに、符号を間違えないように気をつけましょう。



(2)　$x=4+\sqrt{2011}$　のとき，　x^2-8x+7　の値を求めなさい。

$$(x-7)(x-1)$$
$$=(-3+\sqrt{2001})(3+\sqrt{2001})$$
$$=2011-9$$
$$=2002$$

※$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3)　Ａさんは，次のきまりにしたがってゲームをする。二つのさいころを同時に投げるとき，Ａさんの得点が奇数である確率を求めなさい。１から６までの どの目が出ることも同様に確からしいものとして答えなさい。

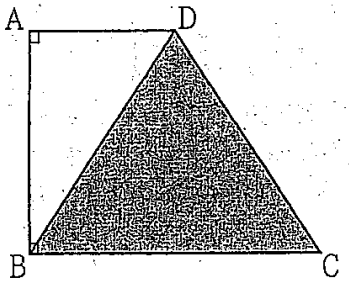
> きまり：二つのさいころを同時に投げるとき，二つのさいころの出た目の数が異なる場合は大きい方の目の数を得点とし，二つのさいころの出た目の数が等しい場合はその出た目の数を得点とする。

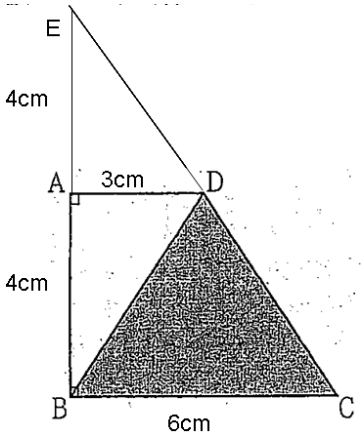
※　すばやく、２個のさいころ表を作ります。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

それぞれの組合せが出る確率は$\dfrac{1}{36}$　　よって、$\dfrac{1}{36}\times 15=\dfrac{5}{12}$

(4) 右図において，四角形ABCDは，AD∥BC，AB＝4 cm，BC＝6 cm，CD＝5 cm，DA＝3 cm，∠DAB＝∠ABC＝90°の台形である。BとDとを結ぶ。△BCDを直線ABを軸として1回転させてできる立体の体積は何 cm^3 ですか。円周率をπとして答えなさい。





Eを図のようにとります。

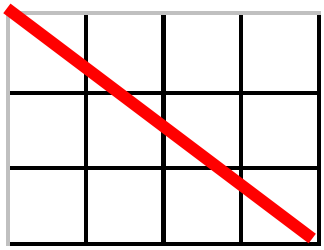
求める体積

＝（△ＥＢＣを回転した円すい）－（△ＥＡＤを回転した円すい）－（△ＢＡＤを回転した円すい）

$$=(36\pi\times 8\times\frac{1}{3})-(9\pi\times 4\times\frac{1}{3})-(9\pi\times 4\times\frac{1}{3})$$

$$=72\pi$$

(5)　関数 $y=-\frac{3}{4}x+k$（k は定数）のグラフ上にある点のうち，x 座標と y 座標とがどちらも正の整数である点の個数を S とする。ただし，k は正の整数とする。

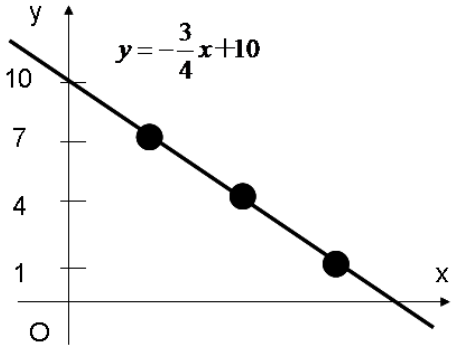


ポイント！

ｘ座標とｙ座標のどちらも整数のである点を格子点と呼ぶことにすると、傾きが $-\frac{3}{4}$ なので、ある格子点から、→へ４行けば、↓に３行き、次の格子点に交わる。

つまり、ｙ座標で考えると、ｙ座標が３小さくなるごとに格子点に交わると言える。

① $k=10$ であるときの S の値を求めなさい。



10→7→4→1 とｙ座標を３ずつ減少させながら、格子点と交わっている。

Ｓ＝３　(0,10)は含まれないことに注意。

☆10÷3＝3　あまり１　とすると一般性のある考え方につながる。

あまりがあるということは、ｙ＝0 では点に交わらないことを示している。

② k が 3 の倍数であるときの S の値を k を用いて表しなさい。

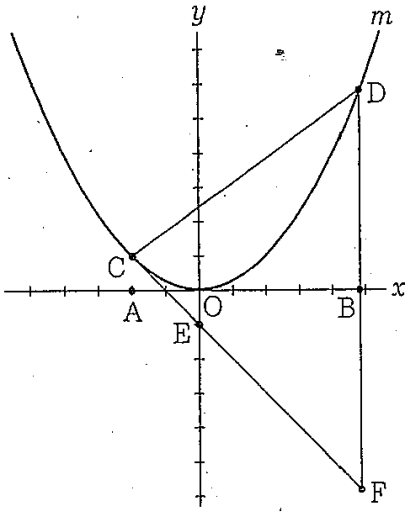
単純に考えると、ｙ座標がｋから０まで小さくなるあいだに、$\frac{k}{3}$ 個の格子点と交わる。

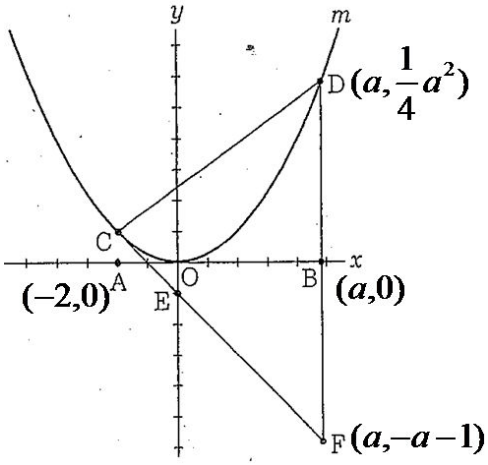
しかしこれは、ｙ＝0 の格子点も含んでいるので、$S=\frac{k}{3}-1$　となる。

※が３の倍数だから、$k\div3=\frac{k}{3}$(あまり 0)として、☆と同じように考えることができる。

しかし、あまりが０なので、ｙ＝0 の格子点を含んでおり、１をひくことには注意する。

(6) 右図において，m は $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフを表す。A，B は x 軸上の点であり，A の x 座標は－2 である。B の x 座標を a（a は正の定数）とする。C，D は m 上の点であり，C の x 座標は A の x 座標と等しく，D の x 座標は B の x 座標と等しい。E は y 軸上の点であり，その y 座標は－1 である。F は，直線 CE 上の点であり，その x 座標は B の x 座標と等しい。C と F，F と D，D と C とをそれぞれ結ぶ。線分 AB の長さを s cm，線分 DF の長さを t cm とする。ただし，座標軸の 1 目もりの長さは 1 cm であるとする。





① $t=\frac{1}{4}s^2$ であることを証明しなさい。

CE：$y=-x-1$

Bのx座標がaだから、D$(a,\frac{1}{4}a^2)$、F$(a,-a-1)$

$s=a+2,$

$t=\frac{1}{4}a^2+a+1$　から

$\frac{1}{4}s^2=\frac{1}{4}a^2+a+1=t$

② 直線 CB が△CFD を面積の等しい二つの図形に分けるときの a の値を求めなさい。

△CFDについて、Cを頂点、線分FDを底辺と考えると、Bが線分FDの中点になるときに面積が二分される。

DB＝BF　より

$\frac{1}{4}a^2-0=0-(a+1)$

$a^2-4a-4=0$

$(a-2)^2=8$

$a-2=\pm2\sqrt{2}$

$a=2\pm2\sqrt{2}$

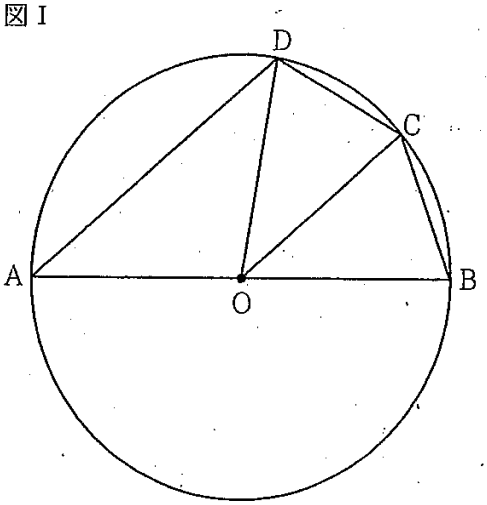
aは正より、$a=2+2\sqrt{2}$

2　図Ⅰ，図Ⅱにおいて，円Ｏは，点Ｏを中心とし線分ABを直径とする円であり，AB＝6 cmである。Ｃは，円Ｏの周上にあってＡ，Ｂと異なる点である。ＯとＣ，ＢとＣとをそれぞれ結ぶ。△COBの内角∠COBの大きさは，0°より大きく，60°より小さい。Ｄは，Ａを通り線分OCに平行な直線と円Ｏとの交点のうちＡと異なる点である。ＯとＤ，ＣとＤとをそれぞれ結ぶ。

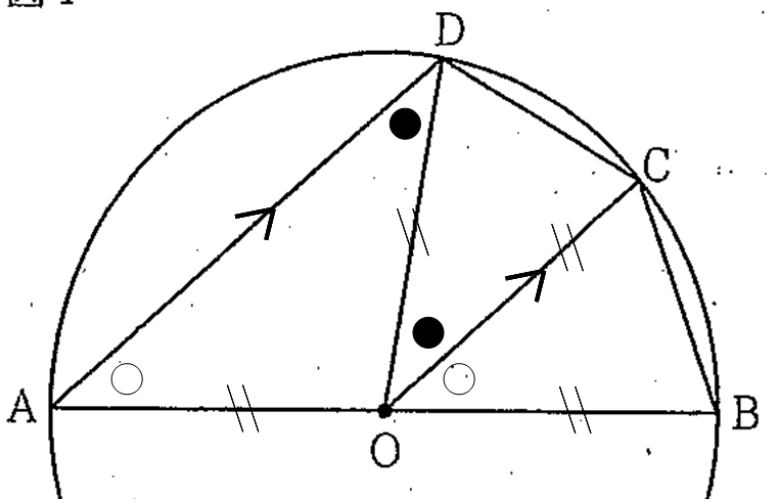
次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

(1)　図Ⅰにおいて，△COB ≡ △CODであることを証明しなさい。

図Ⅰ



図Ⅰ



ＡＤ∥ＯＣより
∠ＡＤＯ＝∠ＣＯＤ(錯角：●)
∠ＤＡＯ＝∠ＣＯＢ(同位角：○)

半径は全て等しいから
ＯＡ＝ＯＤより
△ＯＡＤは二等辺三角形だから
∠ＡＤＯ＝∠ＤＡＯ
∴∠ＣＯＤ(●)＝∠ＣＯＢ(○)　①

ＯＣ＝ＯＣ　②
ＯＤ＝ＯＢ　③　は簡単。
・　2 辺とその間の角がそれぞれ等しいが合同条件

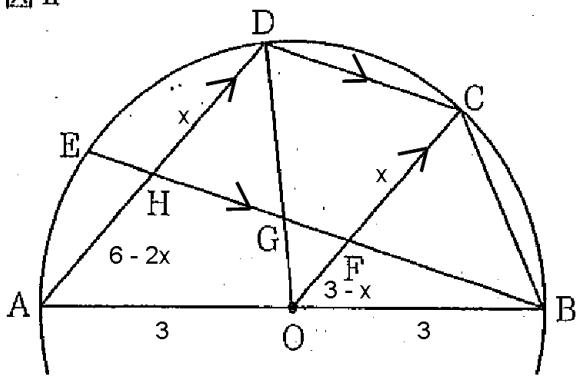
(大阪府教育委員会の解答例)

(1)　△COBと△CODにおいて
　OC = OC　(共通) …… ㋐
　円Oの半径だから　OB = OD …… ㋑
　AD // OCだから　∠COB = ∠DAO　(同位角) …… ㋒
　△OADは二等辺三角形だから　∠OAD = ∠ODA …… ㋓
　AD // OCだから　∠ODA = ∠COD　(錯角) …… ㋔
　㋒，㋓，㋔より　∠COB = ∠COD …… ㋕
㋐，㋑，㋕より，2辺とその間の角がそれぞれ等しいから
　△COB ≡ △COD

(2)　図Ⅱにおいて，Ｅは，Ｂを通り線分ＣＤに平行な直線と円Ｏとの交点のうちＢと異なる点である。Ｆは線分ＢＥと線分ＯＣとの交点であり，Ｇは線分ＢＥと線分ＯＤとの交点であり，Ｈは線分ＢＥと線分ＡＤとの交点である。

①　ＨＤ＝x cm とするとき，線分ＡＨの長さをxを用いて表しなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

図Ⅱ



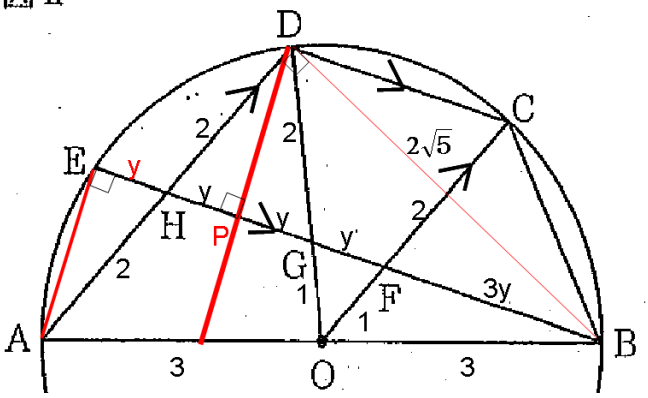
ＡＤ∥ＯＣ、ＥＢ∥ＤＣより
四角形ＨＤＣＦは平行四辺形
ＨＤ＝ＣＦ＝x
ＯＣ＝3より、ＯＦ＝3－x

ＡＤ∥ＯＣより、
ＯＦ：ＡＨ＝3：6＝1：2
よって、ＡＨ＝2ＯＦ＝6－2x

(大阪府教育委員会の解答例)
(求め方)
AD // OC，EB // DC より，四角形 DHFC は平行四辺形だから　FC = HD = x (cm)
よって　OF = OC − FC = 3 − x (cm)
AD // OC だから　OF : AH = BO : BA = 3 : 6 = 1 : 2
したがって　AH = 2 OF = 6 − 2x (cm)

②　ＨＧ＝２ＧＦであるときの線分ＥＨの長さを求めなさい。

図Ⅱ



①の上図において、
ＡＤ∥ＯＣより、△ＧＦＯ∽△ＧＨＤ
ＨＧ＝２ＧＦより、
ＤＨ：ＯＦ＝２：１＝ｘ：３－ｘ
よって、ｘ＝２
上図に X=2 を代入すると左図のようになる。

左図のように補助線 AE、DB を引く。
ＡＢは円Ｏの直径より、
∠ＡＥＢ＝90°、∠ＡＤＢ＝90°

△ＡＤＢにおいて、三平方の定理よりＤＢ＝$2\sqrt{5}$、△ＤＨＢにおいて、三平方の定理よりＨＢ＝$2\sqrt{6}$ (※)

また、ＤＣ∥ＥＢより、ＯＧ＝１、ＧＢ＝２
図のように、ＡＥ∥ＤＰとなるように補助線をひくと、△ＤＨＧは二等辺三角形よりＤＰは底辺ＨＧを二等分する→HP=GP。　また、HEA≡△HPD（証明省略）
さらに、GF : HG＝1:2、BF:BH=1:2 であり、HP=y とおくと、PG=y、GF=y、BF=3y

よって、HB＝6 y＝$2\sqrt{6}$、y＝$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　△HEA≡△HPD より、EH＝y＝$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【別解】　(※)のところで、△HEA∽△HDB　に気がつければ、

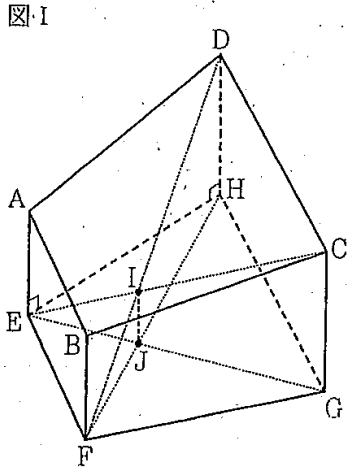
EH : DH＝HA : HB から、EH : 2＝2 : $2\sqrt{6}$ で、EH＝$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　とすぐに求まります。

こちらの方がスマートな解答です。

3　図Ⅰ，図Ⅱにおいて，立体 AEFB − DHGC は六つの平面で囲まれてできた立体である。四角形 AEFB は AE = 3 cm，AB = 5 cm の長方形であり，四角形 DHGC は DH = 4 cm，DC = 9 cm の長方形であって，平面 AEFB と平面 DHGC とは平行である。四角形 ABCD は AB // DC，AD = BC の台形であり，四角形 EFGH は EF // HG，EH = FG の台形である。四角形 AEHD は，AE // DH，∠AEH = ∠EHD = 90° の台形である。四角形 BFGC は BF // CG の台形であって，台形 BFGC ≡ 台形 AEHD である。FG = x cm とする。

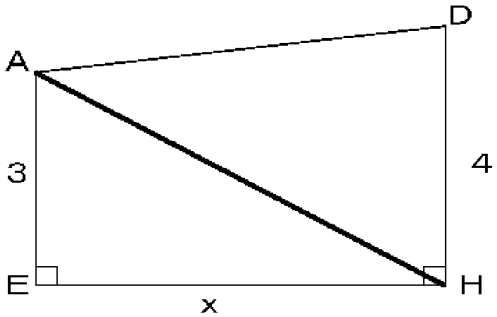
次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

図Ⅰ



(1)　図Ⅰにおいて，E と C，F と D とをそれぞれ結ぶ。このとき，EF // DC であり，線分 EC と線分 FD は交わる。I は，線分 EC と線分 FD との交点である。J は台形 EFGH の対角線の交点である。I と J とを結ぶ。このとき，IJ // CG，IJ // DH である。

①　台形 AEHD の面積を x を用いて表しなさい。



台形 BFGC≡台形 AEHD
FG = EH = x

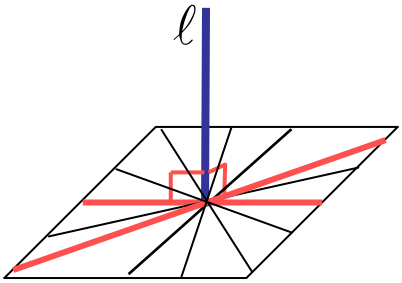
台形の面積：（上底＋下底）× 高さ ÷ 2 より

$$(3+4)x\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}x$$

※図のように、AHに補助線をひき、三角形２つに分けて計算しても同じです。

② 線分 IJ の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

まずは、面と直線が垂直であるということをおさえておきましょう。

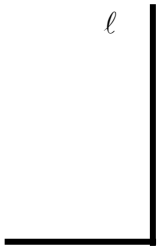


○直線と平面が垂直であること

直線ℓと平面が点○で交わり、点○を通る平面上の全ての直線と、直線ℓが垂直であるとき、直線ℓと平面は垂直であるといいます。

ここで、平面と直線が垂直であることをいうためには、「直線ℓと点○を通る2つの直線と垂直であること」を言えれば十分です。

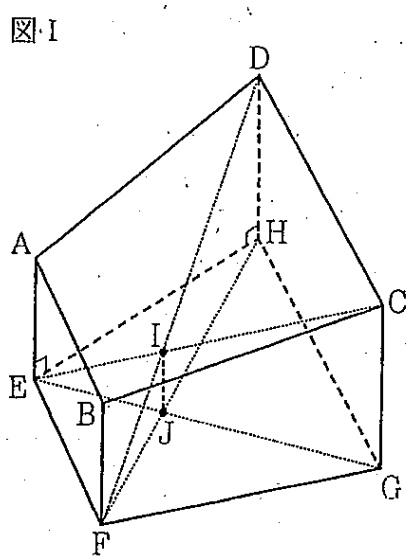
基本かつ重要事項ですので、しっかり押さえましょう。直角が２つで良い理由は、２つあれば、平面と直線の関係が確定するからです。



イメージとしては、左図のような１つの直角をもつ物体を想像してください。
左側の根本を持てば、グルグル回すことができますよね。これは、上図でℓが平面と一つだけ直角と言えた状況と同じです。これだとℓはまだクルクル回れます。
そこで、もう一つ別の方向から支えてやると、ℓは動けなくなります。
３つ目が不要なことがイメージしてもらえたでしょうか？

では解説です。

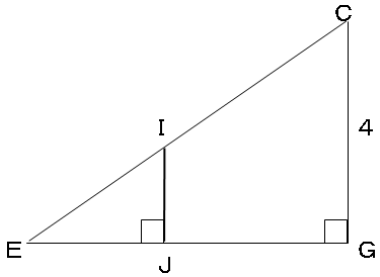
図･I



∠ＣＧＦと∠ＣＧＨの２つが垂直なので、上記から、四角形ＥＦＧＨ(を含む面)とＣＧは垂直になります。ということは、ＣＧはＧを通る四角形ＥＦＧＨ(を含む面)上の直線と全て垂直になるので、∠ＣＧＥは直角です。(∠ＤＨＦについても同様)

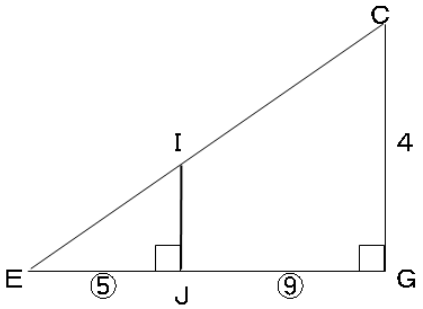
また、ＩＪ∥ＣＧより、∠ＩＪＥも直角です。

△ＥＣＧは下図のようになります。ここで、△ＥＩＪと△ＥＣＧが相似であることはみえみえなのですが、相似比がまだ分かりません。



そこでもとの立体に戻って考えてみると、ＦＪとＪＧの比なら分かりそうです。なぜなら、ＥＦ∥ＨＧより、２つの錯角がそれぞれ等しいから、△ＪＥＦ∽△ＪＧＨ　ＥＦ：ＧＨ＝５：９＝ＦＪ：ＧＪ

よって、左図のようになり、



$$IJ = 4\times\frac{5}{14}=\frac{10}{7}$$

(大阪府教育委員会の解答例)

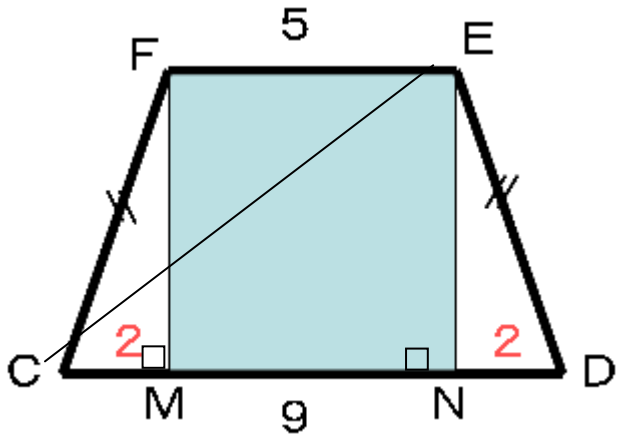
（求め方）

EF // HG だから　JE : JG = EF : GH = 5 : 9

IJ // CG だから　IJ : CG = EJ : EG = 5 : 14

したがって　$IJ = \frac{5}{14}CG = \frac{10}{7}$ (cm)

③　線分ECの長さが11 cmであるときのxの値を求めなさい。



【等脚台形】

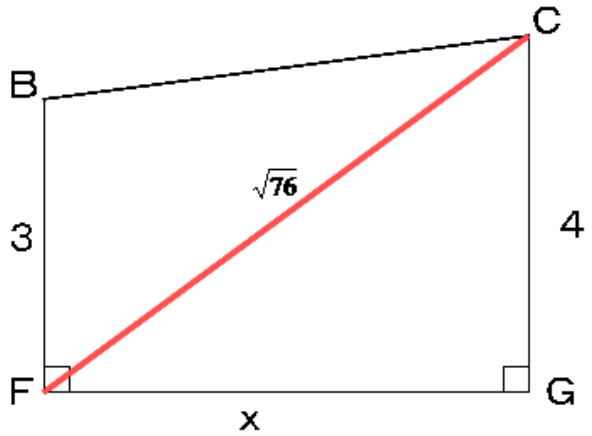
FE // CD である台形において、∠C＝∠D（または∠F＝∠E）を満たすとき、この台形を等脚台形といいます。

そのときは、ＦＣ＝ＥＤですし、対角線ＦＤ＝ＥＣとなります。左右対称な図形ですから、こうなることは簡単にイメージできると思います。裏返すとピッタリ重なる図形です。

そうすると、ＣＭ＝ＤＮ＝２になりますよね。大問３は等脚台形だらけなのです。

EC＝11、CN＝7 より、△ECN において三平方の定理により、EN＝$\sqrt{72}$ ＝FM

FM＝$\sqrt{72}$ 、CM＝2 より、△FCM において三平方の定理により、FC＝$\sqrt{76}$



ここまでこられれば大丈夫でしょう。

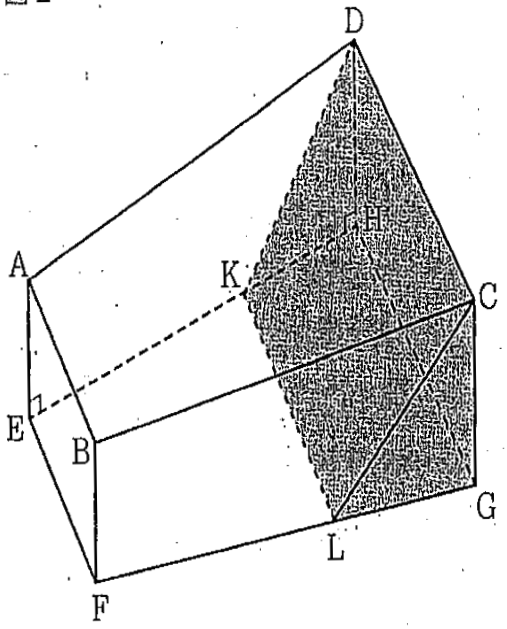
△CFG において三平方の定理により、x ＝$2\sqrt{15}$ になります。

※着眼点としては、ＥＣからＦＧまで近づいていくときに、間にはＢＣ、ＦＣ、ＥＧがあります。
ただ、ＢＣはＥＣと同一平面になく、長さを求めるのことは不可能です。
私は今回ＦＣ経由で答えを出しましたが、ＥＧ経由でも求まります。考えてみてください。
与えられた条件(ここではＥＣ)からどうゴール(ここではＦＧ)へ向かって寄せていくか、そのときに同一平面にある辺が求められないかと考えながら攻めていきましょう。

(2) 図Ⅱは，$x=16$ であるときの状態を示している。

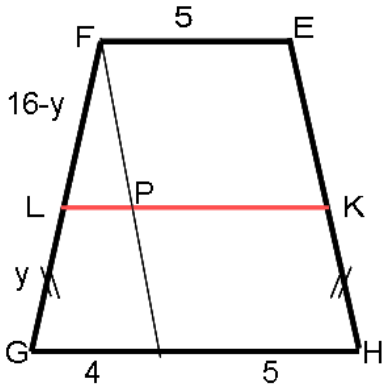
図Ⅱにおいて，K は辺 EH 上にあって，E，H と異なる点である。L は辺 FG 上にあって，LG＝KH となる点である。このとき，4 点 K，L，C，D は同じ平面上にあり，4 点 K，L，C，D を結んでできる四角形 KLCD は KL∥DC，KD＝LC の台形である。LG＝y cm とし，$0<y<16$ とする。立体 DC－KLGH の体積を y を用いて表しなさい。

図Ⅱ



体積を考えるのですが、四角形 KLGH は台形です、単純な三角柱では求まりません。
そこで作戦は、①細かく分けるか、②大きく求めて不要なところを除くかです。どちらでもできます。

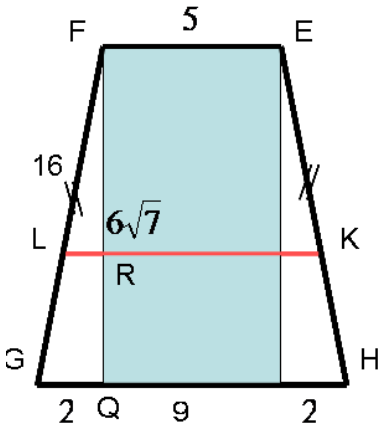
とりあえずＬＫを出しておきましょう。



FE∥LK∥GH より

$$LP=4\times\frac{16-y}{16}=\frac{16-y}{4}$$

よって、$LK=5+\frac{16-y}{4}=9-\frac{y}{4}$

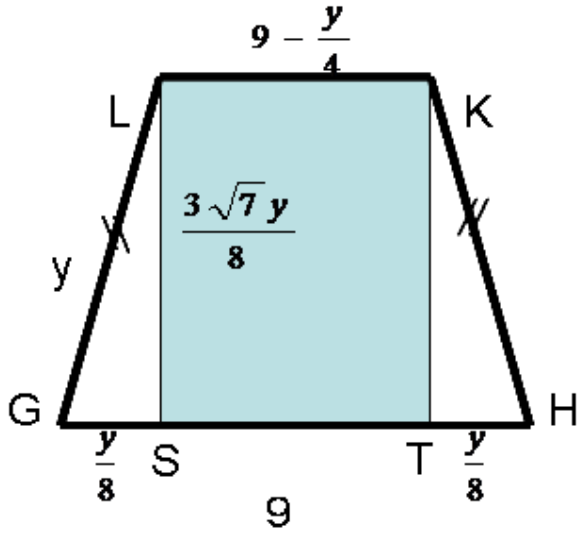


さっきの(1)③のように台形 FGHE は等脚台形なので、
FG＝16、GQ＝2 より、△FGQ において三平方の定理により、

$FQ=6\sqrt{7}$

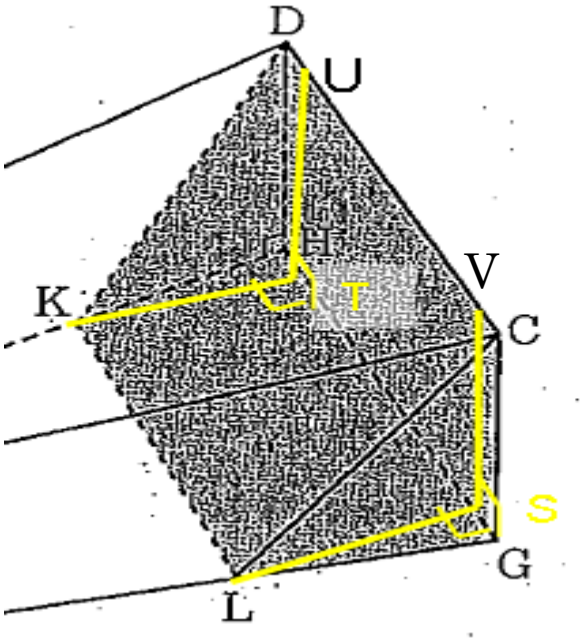
$$RQ=6\sqrt{7}\times\frac{y}{16}=\frac{3\sqrt{7}y}{8}$$

では、いよいよ体積を求めます。まずは作戦①で。



現状をまとめると左図のようになる。

T を通り、台形 KLGH に垂直になるように線分 TU をひく（左下図）。同様に線分 SV もひく。
∠KTG、∠UTK は直角なので、KT と長方形 DHGC も垂直になり、KT が四角すい K- DHTU の高さになる。
以上より、求める体積は、
　(三角柱 KTU－LSV の体積)
＋(四角すい K－DHTU の体積)
＋(四角すい L－CGSV の体積)
　＝　(三角柱 KTU－LSV の体積)
　　＋２×(四角すい K－DHTU の体積)となります。



$$\left\{\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}y}{8}\times 4\times(9-\frac{y}{4})\right\}+\left\{2\times(4\times\frac{y}{8}\times\frac{3\sqrt{7}y}{8}\times\frac{1}{3})\right\}$$
$$=\frac{27\sqrt{7}y}{4}-\frac{\sqrt{7}}{16}y^2$$

作戦②は、求める体積をすっぽり包む三角柱から、両側の三角すいを２個除くやり方です。
これはご自身でやってみてください。ほぼ同程度の計算量です。

【解いてみた感想】

今年は文理学科初年度で注目していましたが、例年の理数科(数学Ｂ)と同傾向で、平面図形・空間図形はどちらも一筋縄ではいかない問題が出ています。問われている内容はいずれも基礎的かつ重要な要素なのですが、時間内にきちんと状況を把握して、整理することはトップレベルの受験生でも厳しいと思います。このレベルを完答しようとするならば、同様の問題をたくさん練習する必要があります。

しかし、入試に合格するということから考えれば、大問２・大問３を６０分の時間内に完答する必要はありません。大問１をミスなくとり、大問２・３で求め方も書く問題が中盤にでてきますが、それぞれここまでは確実にとりたいです。これがなにより重要です。ここまでとれれば、数学が足をひっぱることはないはずです。配点は事前に決められており、文理学科なら、120 点中、94 点がここまでであるのですから。あとは、大問２(２)②、大問３(１)③、大問３(２)のうち、とれそうなものに時間をかければよいでしょう。

優秀で数学が得意な人ほど、試験中解けないものが一問でもあると動揺してしまうものですが、そこで焦って、他の易しい問題を落とすというのが、この試験、この配点で一番やってはいけないことです。

当然のことながら合格したいのならば、受験勉強期に、難問ばかりを練習するのでなく、まず苦手分野を残さないようにし、確実な計算力を身につけることが大切です。解いてみた感想でした。